

TW

**stichting  
mathematisch  
centrum**



---

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TD 6/73

AUGUSTUS

WERKBESPREKINGEN IN EERSTE HELFT 1973

TW

---

**2e boerhaavestraat 49 amsterdam**

BIBLIOTHEEK

MATHEMATISCH  
AMSTERDAM

CENTRUM

223.827

*Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.*

*The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.*

## Inhoud

N.M. Temme, Verslag van een conferentie over asymptotische ontwikkelingen.	1
E.W.C. van Groesen, Stroomvoerende draad in magneetveld: Stabiliteit van de stationaire toestanden.	3
T.H. Koornwinder, Toepassingen van Weinberger's maximumprincipe voor hyperbolische differentiaalvergelijken.	8
G.M. Willems, De Van der Pol vergelijking met een periodieke aandrijvende term.	11
J.W. de Roever, Newton-reeksen.	14
N.M. Temme, Analytische methoden voor een singulier storingsprobleem in een cirkel.	18



Werkbespreking 1 februari 1973,  
N.M. Temme.

Verslag van een conferentie over asymptotische ontwikkelingen.

Het congres "Techniques of asymptotic expansion" werd gehouden in Guildford, University of Surrey, Engeland van 3 tot en met 5 januari 1973. De sprekers en hun onderwerpen waren

A. Erdélyi (Edinburgh)	Inleiding
F.J. Ursell (Manchester)	Integralen
J. Heading (Wales)	Differentiaalvergelijkingen
L.E. Fraenkel (Cambridge)	Singuliere Storingen.

1. Erdélyi sprak over de meest gangbare begrippen uit de asymptotiek en gaf de gebieden aan waar asymptotische methoden vaak worden toegepast.

De andere sprekers hielden elk 3 voordrachten van 2 uur.

2. Ursell besteedde voornamelijk aandacht aan de zadelpuntsmethode. Na enige elementaire zaken als het lemma van Watson kwamen voornamelijk aan de orde:

- a. het bepalen van de (steepest) descent wegen,
- b. de behandeling van integralen met dicht bij elkaar liggende zadelpunten.

De methodes werden toegepast op het Kelvin probleem over het golfpatroon achter een varend schip. De volgende integraal treedt daarbij op

$$I(N, \theta) = \int_{-\infty - \pi i/4}^{\infty - \pi i/4} \text{ch}^3 u \exp\{iN(\cos \theta \text{chu} - \frac{1}{2} \sin \theta \text{sh } 2u)\} du.$$

De zadelpunten volgen uit

$$\frac{d}{du} (\cos \theta \text{chu} - \frac{1}{2} \sin \theta \text{sh } 2u) = 0$$

met als oplossingen  $\text{sh } u = \frac{1}{4} \{ \text{ctg} \theta \pm (\text{ctg}^2 \theta - 8)^{\frac{1}{2}} \}$ ; twee reële zadelpunten

liggen voor  $\theta \simeq \theta_c = \arcsin 1/3$  dicht bij elkaar. Dit geeft aanleiding tot een asymptotische ontwikkeling waarin Airy functies voorkomen.

3. Heading sprak over WKBJ methodes, methodes om het gedrag van de oplossingen van de differentiaal vergelijking  $w''(z) + k^2 q(z)w(z) = 0$  ( $k$  groot) te analyseren. Speciale aandacht moet hierbij besteed worden aan de omgevingspunten in het  $z$ -vlak van de turning ofwel transition points; dit zijn de nulpunten van  $q$ . In zo'n omgeving moet voor een uniforme benadering gebruik gemaakt worden van Airy functies. Nogal nadrukkelijk werd keer op keer opgemerkt dat de methode door physici veelal fout wordt gebruikt omdat de resultaten afgeleid voor reële  $q$  lukraak worden overgenomen voor complexe  $q$ .

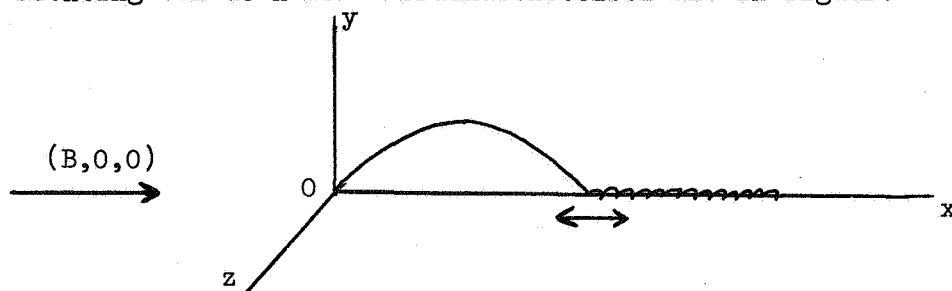
4. Fraenkel hield zich voornamelijk bezig met het onderwerp "matched asymptotic expansions". Hierbij gebruikt hij inner en outer expansion operators. Naast de voorbeelden uit Proc.Camb.Phil.Soc.65(1969) werden enige nieuwe problemen behandeld. De indruk werd gewekt dat met Fraenkel's methoden op systematische wijze het matching principe gehanteerd kan worden, nadat geconstateerd is welke asymptotische rijen in het inner en outer gebied relevant zijn.

Werkbespreking 15 februari 1973,

E.W.C. van Groesen.

Stroomvoerende draad in magneetveld: Stabiliteit van de stationaire toestanden.

Beschouw een draad met constante lengte 1 die in een eindpunt vast is, en waarvan het andere eindpunt verbonden is aan een veer die alleen kan bewegen in de richting van de x-as. Coördinatenstelsel als in figuur.



De positie van een punt van de draad ten tijde  $t$  wordt weergegeven door  $\underline{r} = \underline{r}(s, t)$ , waarin  $s$  de booglengte is ( $s=0$  in  $0$ ). De constante massadichtheid is  $\rho$ .

De veerconstante zij  $a$ , en de spanning resp. de energie van de veer als de draad geen uitwijking heeft stellen we  $\bar{\sigma}_0$  resp.  $E_0$ .

Door de draad loopt een elektrische stroom, met constante grootte  $J(>0)$ .

Deze hele configuratie wordt gezet in een constant, homogeen magneetveld  $\underline{B} = (B, 0, 0)$ . Het systeem wordt dan beschreven door:

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} \rho \underline{r}_{tt} = (\sigma \underline{r}_s)_s + J \underline{r}_s * \underline{B} & \text{bewegingsvergelijkingen.} \\ \underline{r}_s^2 = 1 & \text{constante lengteconditie.} \\ \sigma(1, t) \cdot x_s(1, t) = \bar{\sigma}_0 + a[1 - x(1, t)] & \text{r.v.w.: krachtenevenwicht } s = 1. \\ \underline{r}(0, t) = 0; y(1, t) = z(1, t) = 0 & \text{randvoorwaarden.} \end{array} \right.$$

De voorkomende grootte  $\sigma(s, t)$  kan beschouwd worden als de spankracht van de draad.

De stationaire toestanden van het systeem worden gegeven door:

$$\text{Als } \frac{2\pi j}{1} \leq \frac{JB}{\bar{\sigma}_0} < \frac{2\pi(j+1)}{1}, \text{ voor zekere } j = 0, 1, 2, \dots, \text{ dan zijn er } j + 1 \text{ stationaire toestanden}$$

$$(\underline{r}_n, \sigma_n) \quad \text{met } n = 0, 1, 2, \dots, j$$

die we kunnen schrijven als:

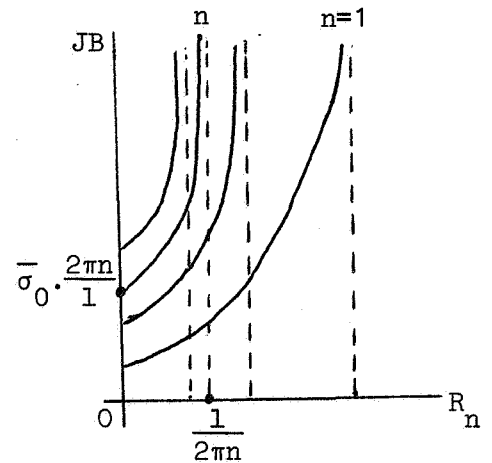
$$n = 0 : \quad \underline{r}_0 = (s, 0, 0) \quad , \quad \sigma_0 = \bar{\sigma}_0$$

$$n \geq 1 : \quad \underline{r}_n = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot s \\ \frac{1}{\lambda} \sin\theta \cdot [\sin(\lambda s + \psi) - \sin\psi] \\ \frac{1}{\lambda} \sin\theta [\cos\psi - \cos(\lambda s + \psi)] \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_n = \frac{JB1}{2\pi n} .$$

Hierin is gezet  $\lambda = \frac{2\pi n}{1}$ , en  $\psi$  is een willekeurige fasehoek (ontaarding door rotatiesymmetrie om x-as); voorts is  $\cos\theta = \frac{\bar{\sigma}_0 + a1}{\sigma_n + a1}$ .

In nevenstaande figuur is  $R_n := \frac{1}{\lambda} \sin\theta$  uitgezet als functie van JB. Hieraan is te zien dat bifurcatie van de nulstand  $(\underline{r}_0, \sigma_0)$  optreedt.

Het blijkt dat als  $\frac{JB}{\bar{\sigma}_0} \geq \frac{2\pi}{1}$  het systeem de laagste energie heeft in de toestand  $(\underline{r}_1, \sigma_1)$ .



Ten aanzien van de stabiliteit van de stationaire toestanden geldt:

- (i) Voor  $0 \leq \frac{JB}{\bar{\sigma}_0} < \frac{2\pi}{1}$  is  $(\underline{r}_0, \sigma_0)$ , de enig mogelijke toestand, stabiel
- (ii) Voor  $\frac{JB}{\bar{\sigma}_0} \geq \frac{2\pi}{1}$  is  $(\underline{r}_1, \sigma_1)$  stabiel.

(i) en (ii) kunnen bewezen worden mbv. de directe methode van Lyapunov, met als Lyapunovfunctie, op een additieve constante na, de totale energie  $J(\underline{r}, \sigma)$ :

$$J(\underline{r}, \sigma) = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \rho \underline{r}_t^2 + \frac{1}{2} \sigma (\underline{r}_s^2 - 1) + \frac{1}{2} J \underline{r}_s \cdot (\underline{r} * \underline{B}) \right] ds + [E_0 + \bar{\sigma}_0 \{1 - x(1, t)\} + \frac{1}{2} a \{1 - x(1, t)\}^2]$$

Voor de overige gevallen, i.e.



(iii) Voor  $\frac{JB}{\bar{\sigma}_0} \geq \frac{2\pi}{1}$  ,  $(\underline{r}_n, \sigma_n)$   $n=0$  ,  $n \geq 2$

lineariseren we de vergelijkingen (1) rond de stationaire toestand.

Schrijven we  $\underline{r} = \underline{r}_n + \varepsilon \underline{\xi}(s,t)$  , met  $\underline{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$

$$\sigma = \sigma_n + \varepsilon v(s,t)$$

dan worden de vergelijkingen (1) in eerste orde:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{voor } n=0: \rho \eta_{tt} = \bar{\sigma}_0 \eta_{ss} + JB \zeta_s \\ \rho \zeta_{tt} = \bar{\sigma}_0 \zeta_{ss} - JB \eta_s \\ \eta(0,t) = \zeta(0,t) = 0; \eta(1,t) = \zeta(1,t) = 0 \end{array} \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \text{voor } n \geq 2: \rho \underline{\xi}_{tt} = \sigma_n \underline{\xi}_{ss} + v \underline{r}_{nss} + v_s \underline{r}_{ns} + JB(0, \zeta_s, -\eta_s) \\ \underline{\xi}_s \cdot \underline{r}_{ns} = 0 \\ \text{r.v.w. voor } s=0, s=1 \end{array} \right.$$

Het is mogelijk om expliciete oplossingen van (2) te vinden die voor  $\frac{JB}{\bar{\sigma}_0} > \frac{2\pi}{1}$  exponentieel aangroeien. Maw. de eerste orde vergelijkingen

zijn voor het geval  $n=0$  instabiel.

De vergelijkingen (3) worden aanmerkelijk vereenvoudigd door invoering van locale, aan de  $n^{\text{de}}$  stationaire toestand gebonden Frenetcoördinaten:

raaklijn  $\underline{r} = \underline{r}_{ns}$ , hoofdnormaal  $\underline{n} = \frac{\underline{r}_s}{|\underline{r}_s|}$ , binormaal  $\underline{b} = \underline{r} * \underline{n}$ .

Zetten we:  $\underline{\xi} = \alpha(s,t) \underline{r} + \beta(s,t) \underline{n} + \gamma(s,t) \underline{b}$

dan gaat (3) over in het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_s - \beta \lambda \sin \theta = 0 \\ \rho \alpha_{tt} = v_s \\ \rho \beta_{tt} = \sigma_n [\beta_{ss} + \alpha_s \lambda \sin \theta - \gamma_s \lambda \cos \theta] + v \lambda \sin \theta \\ \rho \gamma_{tt} = \sigma_n [\gamma_{ss} + \beta_s \lambda \cos \theta] \\ \text{r.v.w. voor } s=0, s=1. \end{array} \right.$$

De algemene oplossing van (4) wordt gegeven door

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \nu \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 (c_j \psi_j + d_j \phi_j) \cdot e^{\frac{+i\omega t}{\lambda}}, \quad c_j, d_j \text{ willekeurig}$$

waarin

$$(6) \quad \psi_i = \begin{pmatrix} \text{sink}_i s \\ \frac{1}{\lambda} \sin \theta \cdot k_i \cdot \cos k_i s \\ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{k_i^2}{\Omega - k_i^2} \text{sink}_i s \\ \sigma_n \cdot \frac{\Omega}{k_i} \cos k_i s \end{pmatrix} \quad \phi_i = \begin{pmatrix} \cos k_i s \\ \frac{1}{\lambda} \sin \theta \cdot k_i \cdot \text{sink}_i s \\ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{k_i^2}{\Omega - k_i^2} \cos k_i s \\ \sigma_n \cdot \frac{\Omega}{k_i} \text{sink}_i s \end{pmatrix} \quad i=1,2,3$$

Hierin is gezet  $\Omega = \frac{\rho \omega^2}{\sigma_n}$ , en  $k_1, k_2, k_3$  en  $\Omega$  moeten voldoen aan de dispersierelatie

$$(7) \quad k^6 - (\lambda^2 + 2\Omega)k^4 + \Omega^2 k^2 + \Omega^2 \lambda^2 \sin^2 \theta = 0.$$

We zoeken nu oplossingen van (4), van de vorm (5), die voldoen aan de zes randvoorwaarden voor  $s = 0, s = 1$ . Omdat de dispersierelatie (7) vrij ingewikkeld is, gaan we als volgt te werk: Beschouw (zeg)  $k_1$  als onafhankelijke variabele; kies bij deze  $k_1$  een van de twee uit (7) volgende waarden van  $\Omega$ ; bepaal dan  $k_2$  en  $k_3$  uit (7). Dan is

$$\Omega = \Omega(k_1); \quad k_2 = k_2(k_1); \quad k_3 = k_3(k_1).$$

De randvoorwaarden waaraan de oplossing dient te voldoen, geven zes vergelijkingen voor de zes onbekenden  $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2$  en  $d_3$ . Opdat er een niet-triviale oplossing is, moet voldaan zijn aan een voorwaarde van de vorm

$$A(k_1) \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_3 \end{pmatrix} = 0,$$

waarin A een 6 bij 6 matrix is, waarvan de elementen functies zijn van  $k_1$ .

De vergelijkingen (3) hebben een instabiele oplossing, als er een  $k_1$  gevonden kan worden zodat voldaan is aan:

$$(a) \det A(k_1) = 0$$

$$(b) \Omega(k_1) < 0$$

$$(c) k_1 \neq k_2, \quad k_2 \neq k_3, \quad k_1 \neq k_3.$$

Met behulp van numerieke methoden is aangetoond dat aan deze voorwaarden (a), (b), (c) inderdaad voldaan wordt door meerdere waarden van  $k_1$ .

Hiermee is dan aangetoond dat voor 't geval  $\frac{JB}{\bar{\sigma}_0} \geq \frac{2\pi}{1}$  de eerste orde verge-

lijkingen (3), voor  $n \geq 2$ , instabiele oplossingen hebben.

Werkbespreking 22 februari 1973,

T.H. Koornwinder.

Toepassingen van Weinberger's maximumprincipe voor hyperbolische differentiaalvergelijkingen.

Voor  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$  zijn Jacobi-polynomen  $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  gedefinieerd als orthogonale polynomen van graad  $n$  op het interval  $(-1, +1)$  t.o.v. de gewichtsfunctie  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  en genormaliseerd zo dat  $R_n^{(\alpha, \beta)}(1) = 1$ .

Gaspar (1971, 1972) bewees de positiviteitseigenschap van de z.g. generaliseerde translatie voor Jacobireeksen:

Stelling 1. Laat  $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$  of  $\alpha \geq |\beta|$ . Als  $\sum_{k=0}^n c_k R_k^{(\alpha, \beta)}(x) \geq 0$  voor

alle  $x \in [-1, +1]$  dan  $\sum_{k=0}^n c_k R_k^{(\alpha, \beta)}(x) R_k^{(\alpha, \beta)}(y) \geq 0$  voor alle

$x, y \in [-1, +1]$ .

In het geval dat  $\alpha = \beta \geq -\frac{1}{2}$  gaat de stelling terug tot Bochner (1954). Weinberger (Annals of Math. 64 (1956), 505-513) gaf voor dit speciale geval een ander bewijs met behulp van een maximumprincipe voor hyperbolische differentiaalvergelijkingen dat hij daartoe afleidde. Wij zullen Weinberger's bewijsmethode voor Stelling 1 generaliseren tot het geval  $\alpha > \beta > -\frac{1}{2}$ .

Laat vanaf nu

$$w(s) = (\sin s)^{2\alpha+1} (\cos s)^{2\beta+1},$$

$$a(s, t) = w(s) w(t),$$

$$u(s, t) = \sum_{k=0}^n c_k R_k^{(\alpha, \beta)}(\cos 2s) R_k^{(\alpha, \beta)}(\cos 2t).$$

Uit de differentiaalvergelijking voor Jacobi-polynomen

$$\begin{aligned} (w(s))^{-1} \frac{d}{ds} [w(s) \frac{d}{ds} R_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2s)] &= \\ &= -4n(n+\alpha+\beta+1) R_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2s) \end{aligned}$$

volgt de hyperbolische differentiaalvergelijking

$$(a u_s)_s - (a u_t)_t = 0.$$

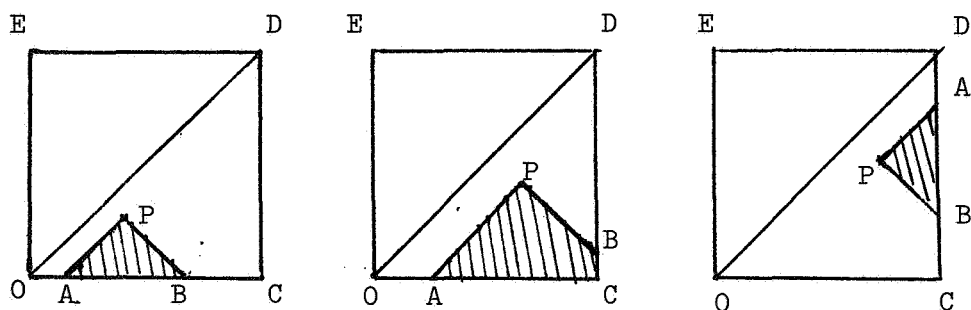
Askey (TW 112 (1969), p.27) bewees met behulp van Bateman's integraal voor Jacobi-polynomen:

Lemma 2. Laat  $\alpha \geq \beta > -1$ . Als  $u(s,0) \geq 0$  voor alle  $s \in [0, \pi/2]$  dan  $u(\pi/2, t) \geq 0$  voor alle  $t \in [0, \pi/2]$ .

Stelling 1 volgt nu in het geval  $\alpha > \beta > -\frac{1}{2}$  snel uit het volgende lemma.

Lemma 3. Laat  $\alpha > \beta > -\frac{1}{2}$ . Als  $u(s,0) > 0$  voor alle  $s \in [0, \pi/2]$  en  $u(\pi/2, t) > 0$  voor alle  $t \in [0, \pi/2]$  dan  $u(s, t) > 0$  voor alle  $(s, t)$  zodat  $0 \leq t \leq s \leq \pi/2$ .

Bewijs. Merk op dat  $a(s,0) \equiv 0 \equiv a(\pi/2, t)$ .



figuur 1

$$O = (0,0) \quad , \quad C = (\pi/2, 0) \quad , \quad D = (\pi/2, \pi/2) \quad , \quad E = (0, \pi/2),$$

$$AP \parallel OD \quad , \quad BP \parallel CE.$$

Voor elk van de drie in figuur 1 aangegeven contouren A B P geldt:

$$0 = \iint_{ABP} [(a u_s)_s - (a u_t)_t] ds dt =$$

$$= \pm \oint_{ABP} (a u_s dt - a u_t ds) =$$

$$= \pm \left( \int_{AP} + \int_{BP} \right) a du. \quad \text{Dus:}$$

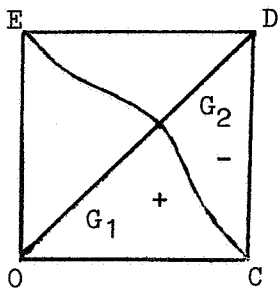
$$(1) \quad 2(a u)(P) = \int_{AP} u(a_s + a_t) dt + \int_{BP} u(-a_s + a_t) dt.$$

Er geldt:

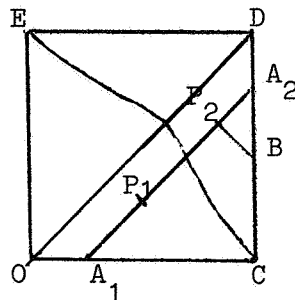
$$\pm a_s + a_t = a(s,t) (\cotg t \pm \cotg s) .$$

$$. (2\alpha+1 \mp (2\beta+1) \tg s \tg t) .$$

Dus als  $0 < t < s < \pi/2$  dan is  $-a_s + a_t$  strikt positief en  $a_s + a_t$  heeft de in figuur 2 aangegeven tekenverdeling.



figuur 2



figuur 3

Veronderstel nu dat  $u(s,t)$  niet strikt positief is voor  $0 \leq s \leq t \leq \pi/2$ . Dan is er een lijn  $A_1 A_2$  evenwijdig aan  $OD$  op minimale afstand van  $C$  zo dat  $u(s,t) = 0$  ergens op  $A_1 A_2$  (zie figuur 3) en op  $A_1 A_2$  zijn er punten  $P_1$  en  $P_2$  op minimale afstand van  $A_1$  resp.  $A_2$  zo dat  $u(s,t) = 0$  in  $P_1$  en  $P_2$ . Minstens één van de lijnstukken  $A_1 P_1$  en  $A_2 P_2$  ligt geheel in  $G_1$  resp.  $G_2$ . Voor zo'n lijnstuk leidt formule (1) tot een tegenspraak.

Werkbespreking 8 maart 1973,

G.M. Willems.

De Van der Pol vergelijking met een periodieke aandrijvende term.

Het is bekend dat de divgl.

$$(1) \quad \frac{dx^2}{dt^2} + v(x^2-1) \frac{dx}{dt} + x = b \cos t$$

voor bepaalde waarden van  $v$  en  $b$  een periodieke oplossing bezit, zie [1].

In deze werkbespreking werd verslag gedaan van onderzoek van J. Grasman en G.M. Willems betreffende de constructie van een asymptotische benadering van de (periodieke) oplossing van (1) voor het geval  $v \gg 1$  en  $b = O(1)$ .

De gebruikte methode voor deze constructie komt in hoofdzaak overeen met de singuliere storingsmethode van Carrier en Lewis voor de benadering van de periodieke oplossing van de autonome Van der Pol vgl., zie [2], [3].

In de onderstaande fig.1 is een schets gemaakt van de opeenvolgende gebieden, waar een lokale asymptotische benadering van de oplossing geconstrueerd is.

Alleen in gebied A levert de singuliere storingsmethode geen uniform geldende asymptotische benadering op.

Met behulp van de methode van twee tijdschalen en averaging bleek het mogelijk te zijn een asymptotische benadering van de oplossing  $x(t)$  in dit gebied te construeren.

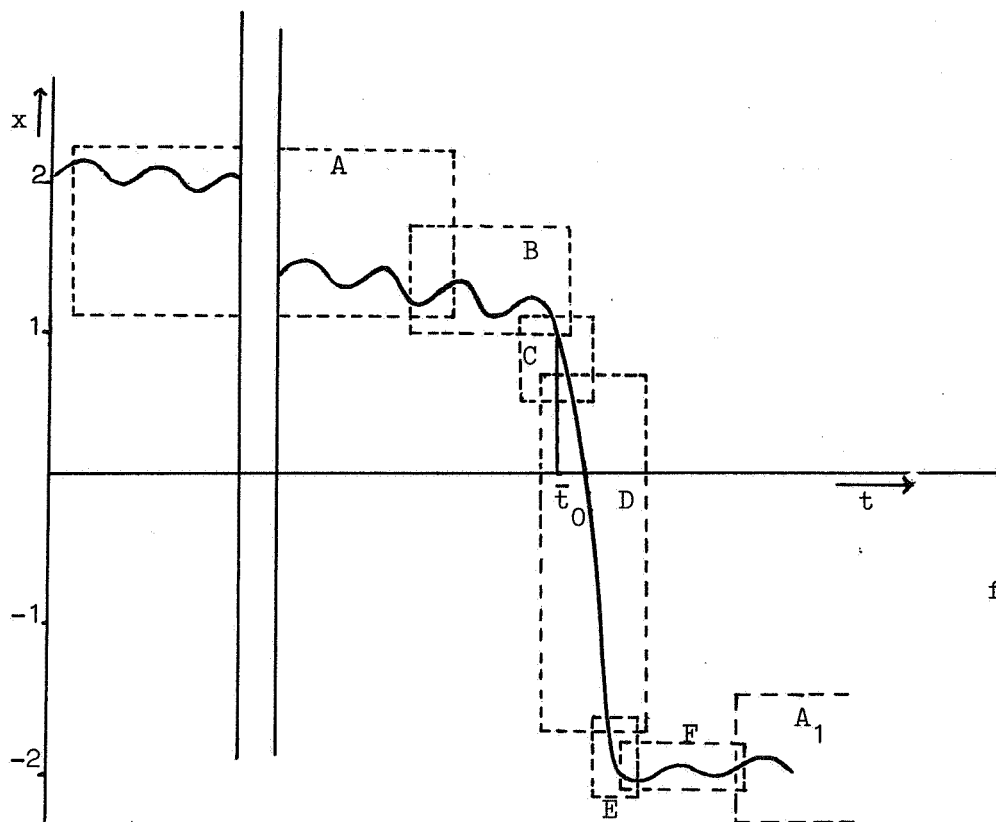


fig.1.1

Op het ogenblik dat de werkbepreking gehouden werd, was het gebied F nog niet precies gelokaliseerd en was het nog niet duidelijk hoe via gebied F aansluiting tussen de benaderingen uit gebied E en gebied  $A_1$  verkregen kon worden.

Hierdoor was het niet mogelijk de volledige oplossing te benaderen en condities voor  $b$  en  $v$  aan te geven voor het bestaan van periodieke oplossingen van (1).

Inmiddels is dit probleem opgelost en wordt er gewerkt aan de rapportering van de resultaten.



Referenties:

- [1] Littlewood, J.E.    On nonlinear differential equations of the second order, III, Acta Mathematica 97 (1957).
  
- [2] Carrier, G.F. ,    The relaxation oscillations of the Van der Pol  
    Lewis , J.A       oscillator, Advances in Appl.Mech., vol.3,  
                        Academic Press (1953), New York.
  
- [3] Bavinck, H.       ,    Relaxatietrillingen, M.C. Syllabus 8, Mathematisch  
    Grasman, J.       Centrum (1969).

Werkbespreking 22 maart 1973,

J.W. de Roever.

Newtonreeksen.

Zij  $f$  een gehele functie, dan geldt volgens de formule van Taylor voor elke vector  $h \in \mathbb{C}^n$

$$f(z+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(h.D)^k}{k!} f(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \exp(h.D) f(z)$$

met  $D$  de vector  $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n})$ .

Formeel kunnen we nu voor  $s \in \mathbb{C}$  schrijven

$$\begin{aligned} f(z+ish) &= \exp(ish.D)f(z) = (\exp ih.D)^s f(z) = \\ (1) \quad &= (1+\Delta_{ih})^s f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} \Delta_{ih}^k f(z) \quad (\text{Newton reeks}) \end{aligned}$$

met  $\Delta_{ih} \stackrel{\text{def.}}{=} \exp(ish.D) - 1$ , zodat  $\Delta_{ih} f(z) = f(z+ih) - f(z)$

$$\text{en } \Delta_{ih}^k f(z) = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^{k-m} f(z+imh).$$

Om de formule van Newton te bewijzen maken we gebruik van Fourier transformatie. Hierdoor gaan de formele operatoren  $\exp ih.D$  over in functies  $e^{-h \cdot \zeta}$ . We leggen aan  $f$  zodanige beperkingen op, dat zijn Fouriergetransformeerde  $g$  een drager  $K$  heeft, waarvoor geldt dat de reeks

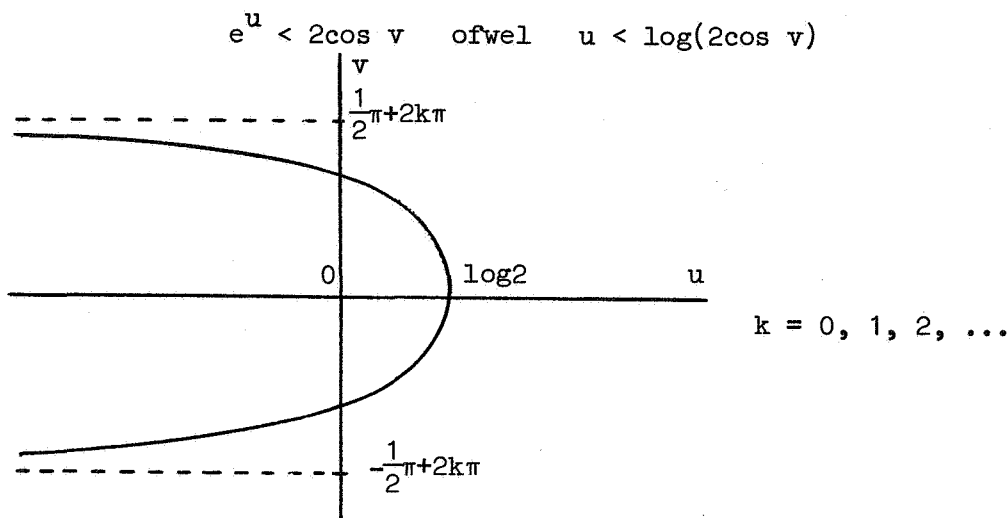
$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} (e^{-h \cdot \zeta} - 1)^k$$

convergeert voor elke  $\zeta \in K$ .  $\zeta$  kan zowel reëel zijn als complex; in het reële geval schrijven we  $\xi$  i.p.v.  $\zeta$ . Voor  $\zeta \in K$  moet gelden

$$|e^{-h \cdot \zeta} - 1| < 1.$$

Stellen we  $-h.\zeta = u + iv$ , dan moet gelden

$$(e^{u+iv}-1)(e^{u-iv}-1) = e^{2u} - 2e^u \cos v + 1 < 1, \text{ dus voor } u \neq -\infty$$



Er moet dus gelden

$$(3) \quad K \subset O_h = \{\zeta \mid |e^{-h\zeta}-1| < 1\}.$$

Is  $K$  compact dan is er een  $\rho < 1$  zodat voor elke  $\zeta \in K$  geldt

$$|e^{-h.\zeta}-1| \leq \rho < 1. \text{ De reeks (2) convergeert dan uniform.}$$

We onderscheiden hier twee gevallen elk met een bijbehorende klasse van functies  $f$ ; in het eerste geval is  $\zeta$  reëel, in het tweede geval complex.

- 1) Zij  $K \subset \mathbb{R}^n$  compact en convex en zij  $I_k(y)$  de functie  $I_k(y) = \sup_{\xi \in K} -y.\xi$ . Volgens de stelling van Paley-Wiener-Schwartz is elke gehele functie  $f$ , die voldoet aan

$$(4) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n : |f(z)| \leq M(1+|z|)^m e^{I_k(y)} \quad \text{met } z = x + iy$$

de Fouriergetransformeerde van een distributie  $g \in E'$  met drager in  $K$  en omgekeerd.  $E'$  is hierbij de duale van de ruimte  $E$ , de ruimte van  $C^\infty$ -functies met als topologie uniforme convergentie op compacte deelgebieden van  $\mathbb{R}^n$ . Is  $g$  gegeven, dan wordt  $f$  bepaald door  $f(z) = \langle g(\xi), e^{iz.\xi} \rangle$ .

We kunnen  $g$  ook opvatten als distributie uit  $E'(0)$ , de duale ruimte van  $E(0)$ : de ruimte van  $C^\infty$ -functies in  $0$  met uniforme convergentie op compacte deelgebieden van  $0$  met  $0$  een open omgeving van  $K$  in  $\mathbb{R}^n$ .

2) Zij nu  $K \subset \mathbb{C}^n$  compact en convex en zij  $H_K(z) = \sup_{\zeta \in K} \operatorname{Im}(-\zeta \cdot z)$ .

Volgens een min of meer analoge stelling is iedere gehele functie  $f$  met

$$(5) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n : |f(z)| \leq M e^{H_K(z)}$$

de Fouriergetransformeerde van een analytische functionaal  $\mu \in H'$ , die gedragen wordt door een open omgeving van  $K$  in  $\mathbb{C}^n$  en omgekeerd. De ruimte  $H'$  van analytische functionalen is de duale van  $H$ : de ruimte van gehele functies met als topologie uniforme convergentie op compacte deelgebieden van  $\mathbb{C}^n$ . Is  $\mu$  gegeven, dan wordt  $f$  bepaald door  $f(z) = \langle \mu(\zeta), e^{i\zeta \cdot z} \rangle$ . We kunnen  $\mu$  ook opvatten als element van  $H'(0)$ , de duale van  $H(0)$ : de ruimte van in  $0$  holomorfe functies met uniforme convergentie op compacte deelgebieden van  $0$  in  $\mathbb{C}^n$  met  $0$  nu een open omgeving van  $K$  in  $\mathbb{C}^n$ .

We kiezen  $K$  in overeenstemming met (3); we kunnen dan aantonen dat de reeks (2) convergeert in  $E(0_h)$  en in  $H(0_h)$ . Voor de Fouriergetransformeerden  $f$  van  $g$  en evenzo van  $\mu$  geldt dan formule (1):

$$\begin{aligned} f(z+ish) &= \langle g(\xi), e^{iz \cdot \xi - sh \cdot \xi} \rangle = \langle g(\xi), e^{iz \cdot \xi} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} (e^{-h \cdot \xi} - 1)^k \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} \langle g(\xi), e^{iz \cdot \xi} (e^{-h \cdot \xi} - 1)^k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} \Delta_{ih}^k f(z). \end{aligned}$$

De Newton reeks is dus geldig voor gehele functies  $f$ , die aan (4) of (5) voldoen.

We kunnen ook de topologie bepalen in de ruimtes van functies  $f$ , die aan (4) resp. (5) voldoen, waarin de reeks (1) convergeert. Het blijkt dat de Newton reeks zeker uniform convergent is in  $z$  voor  $z$  uit compacte gebieden van  $\mathbb{C}^n$ .

De mogelijkheden zijn nu nog niet uitgeput. Geval (1) kan gegeneraliseerd worden tot gevallen, waarin de drager  $K$  van  $g$  niet compact is.

De enige eis is, dat  $K \subset O_h$ . In het geval  $K \subset O_h \subset \mathbb{R}^n$  is er een stelling voor handen, die een generalisatie is van de stelling van Paley-Wiener-Schwartz:

Zij  $C$  een open convexe kegel in  $\mathbb{R}^n$  met de oorsprong als top en zij  $T^C \subset \mathbb{C}^n$  de verzameling  $\mathbb{R}^n + iC$ . Is  $f$  holomorf in  $T^C$  en voldoet  $f$  voor iedere  $z \in T^{C'}$  met  $C'$  een open kegel, welks afsluiting op de top na geheel binnen  $C$  ligt, aan

$$(6) \quad |f(z)| \leq M(C') (1+|z|)^m (1+|y|)^{-m} e^{a|y|}, \text{ waarbij } M \text{ onafhankelijk}$$

van  $m$ , maar afhankelijk van  $C' \subset C$  is, dan is  $f$  de Fouriergetransformeerde van een distributie  $g$  uit  $S'$  met drager  $K$  in de verzameling  $\{\xi \mid \sup_{y \in C} -y \cdot \xi \leq a|y|\} \subset \mathbb{R}^n$ , en omgekeerd. Het is duidelijk dat  $K$  nu niet compact hoeft te zijn.

Voor  $y \rightarrow 0$  in  $C'$  nadert  $f(x+iy)$  tot  $f(x)$  in  $S'$  en de orde van de distributie  $f(x)$  wordt bepaald door  $m$ . We kunnen nu de Newtonreeks (1) met  $h$  reëel en  $h \in C$  afleiden voor functies  $f$ , die holomorf zijn in  $T^C$  en voldoen aan (6) met  $a = \frac{\log 2}{|h|}$ . Voor iedere  $y \in C$  behoort  $f(x+iy)$  tot  $S'(x)$  evenals de limiet  $f(x)$  voor  $y \rightarrow 0$  in  $C'$ . Het algemenere geval waarin voor iedere  $y \in C$   $f(x+iy)$  tot  $D'(x)$  behoort is een generalisatie van geval 2). We moeten in dat geval de stelling over analytische functionalen generaliseren tot analytische functionalen, die door niet-compacte verzamelingen gedragen worden. De functies  $f$ , die holomorf zijn in  $T^C$ , voldoen dan aan  $|f(z)| \leq M(C') (1+|y|)^{-m} e^{a|y|}$  voor  $|x| \leq N$  en  $y \in C'$  met  $M$  afh. van  $C'$  en  $N$  en  $m$  afhankelijk van alleen  $N$ ; voor  $y \rightarrow 0$  in  $C'$  bepaalt  $m$  de orde van de distributie  $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \in C'}} f(x+iy)$  in  $D'(N)$ ,

de duale van  $D(N)$ : de ruimte van toetsfuncties met compacte drager in de bol met straal  $N$ .

Dit laatste geval is nog in voorbereiding evenals toepassingen van de Newton reeks en andere formules die op analoge wijze afgeleid kunnen worden zoals

$$\text{ih.D } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \Delta_{\text{ih}}^k f(z).$$

Werkbespreking 17 april 1973,

N.M. Temme.

Analytische methoden voor een singulier storingsprobleem in een cirkel.

Gegeven is het randwaardeprobleem

$$(1) \quad \varepsilon \Delta \Phi(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x,y) = 0 \text{ voor } r = x^2 + y^2 < 1,$$

$$\Phi(x,y) = y = \sin \theta \quad \text{voor } r = 1,$$

met  $\varepsilon > 0$  een kleine parameter.

Stel  $\Phi(x,y) = e^{\omega y} \psi(x,y)$  met  $\omega = 1/(2\varepsilon)$ , dan ontstaat

$$(2) \quad \Delta \psi(x,y) - \omega^2 \psi(x,y) = 0 \text{ voor } r < 1,$$

$$\psi(x,y) = \sin \theta e^{-\omega \sin \theta} \quad \text{voor } r = 1.$$

Gevraagd wordt de asymptotische ontwikkeling van  $\Phi$  voor  $\varepsilon \rightarrow 0$ , (of:  $\omega \rightarrow \infty$ ), in het bijzonder voor  $r \rightarrow 1$  en nog meer in het bijzonder voor  $\theta \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow 1$ .

Het probleem is een singulier storingsprobleem. Op de onderrand van de cirkel  $r = 1$  blijkt de oplossing  $\Phi$  zich "rustig" te gedragen; voor de bovenrand is het gedrag veel grilliger. Ook in de omgeving van de punten  $(1,0)$  en  $(-1,0)$  geeft het gedrag van  $\Phi$  aanleiding tot zeer ingewikkelde asymptotische ontwikkelingen.

Een eerste benadering van  $\Phi$  wordt gegeven door  $\Phi_0 = -\sqrt{1-x^2}$ . Dit is een oplossing van het gereduceerde probleem (dat ontstaat door in (1)  $\varepsilon = 0$  te nemen)  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} = 0$ , terwijl aan de randvoorwaarde op  $r = 1$  voor  $y < 0$  voldaan is.

De oplossing van (2) vinden we na separatie van de variabelen  $r$  en  $\theta$ . Met  $\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$  ontstaat voor (1) dan

$$(3) \quad \Phi(x,y) = -e^{\omega r \cos \phi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{I'_n(\omega)}{I_n(\omega)} I_n(\omega r) \cos n \phi;$$

$\varepsilon_0 = 1$  ,  $\varepsilon_n = 2$  voor  $n \geq 1$ .  $I_n(\omega)$  is een gemodificeerde Bessel funktie.

De reeks in (3) is niet geschikt voor asymptotisch onderzoek. Transformatie geschiedt via de sommatieformule van Poisson in de volgende versie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n f_n = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m g(m) , \text{ met}$$

$$g(m) = 2 \int_0^{\infty} f(v) \cos 2\pi m v \, dv.$$

Dit levert nu de reeks

$$\Phi = -2e^{-\omega r \cos \phi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \Phi_m ,$$

$$\Phi_m = \int_0^{\infty} \frac{I'_v(\omega)}{I_v(\omega)} I_v(\omega r) \cos v\phi \cos 2\pi m v \, dv$$

en de eerste term blijkt nu veel informatie te geven

$$\Phi_0 = \int_0^{\infty} \frac{I'_v(\omega)}{I_v(\omega)} I_v(\omega r) \cos v\phi \, dv.$$

Met asymptotische formules voor de Bessel functies, te weten

$$I_v(vx) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \frac{1}{(1+x^2)^{1/4}} \exp(v\eta(x)) \text{ met}$$

$$\eta(x) = \sqrt{1+x^2} + \ln x - \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) \text{ en}$$

$$I'_v(vx) \sim \frac{(1+x^2)^{1/4}}{\sqrt{2\pi v}} \exp(v\eta(x)) \text{ ontstaat}$$

$$\Phi_0 \sim \frac{1}{2} \frac{\omega r}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{(1+r^2 \text{sh}^2 t) \text{ch } t\}^{\frac{1}{2}} \exp(\omega r f(t)) dt,$$

met

$$f(t) = \text{ch } t - (t-i\phi) \text{sh } t.$$

Met de zadelpuntsmethode wordt nu voor  $\phi_0$  een asymptotische ontwikkeling afgeleid.

Zadelpunten volgen uit  $f'(t) = 0$ , met als resultaat  $t = i\phi$  en  $t = \frac{1}{2}i\pi(2k+1)$ ,  $k$  geheel. Voor  $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$  is  $t = i\phi$  het belangrijkste zadelpunt en geeft

$$\phi_0 \sim \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} e^{\omega r \cos \phi}.$$

Hogere orde-benaderingen geven de reeks

$$\phi \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w_m(x,y)}{(\omega r)^m}, \quad w_0 = -\sqrt{1-x^2}.$$

Voor  $\phi \sim \frac{1}{2}\pi$  en voor  $\phi > \frac{1}{2}\pi$  moet de ontwikkeling herzien worden. Er moeten dan andere ontwikkelingen voor de Bessel funkties gebruikt worden, aangezien de eerder gebruikte niet geldig zijn voor bepaalde waarden van de parameters.